МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О.Б. Ахієзер, О.А. Геляровська, О.І. Дунаєвська,
О.А. Галуза, Н. В. Москалець

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ЗА ТЕМОЮ «ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ»

з вищої математики для студентів
заочної та дистанційної форм навчання

Затверджено
редакціоно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 25.06.2015 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2016

Методичні вказівки до індивідуальних завдань за темою «Подвійні інтеграли» з вищої математики для студентів заочної та дистанційної форм навчання : навч. посіб. / укл. О. Б. Ахієзер, О. А. Геляровська, О. І. Дунаєвська, О. А. Галуза, Н. В. Москалець – Х. : НТУ «ХПІ», 2016. – 52 с.

Укладачі: О. Б. Ахієзер
О. А. Геляровська
О. І. Дунаєвська
О. А. Галуза
Н. В. Москалець

Рецензент: Г. Н. Жолткевич

*Автори:* О. Б. Ахієзер, О. А. Геляровська, О. І. Дунаєвська, О. А. Галуза, Н. В. Москалець

Кафедра комп'ютерної матерматики та математичного моделювання

**ЗМІСТ**

# ВСТУП

Останні роки в технічних університетах відбуваються зрушення у методиці викладання вищої математики, яку намагаються наблизити до інженерних дисциплін та ліквідувати відстань між абстрактними математичними теоріями і прикладними задачами через тлумачення формальних теорій в категоріях реальних завдань. Особливо гострою є проблема актуалізації складу заочної та дистанційної математичної освіти, де відсутній постійний контакт студента з викладачем. Тому актуальним стало створення нового методичного забезпечення, яке б відповідало цим трендам.

Методичні вказівки входять до складу серії посібників «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання».

Пропоновані методичні вказівки містять приклади розв’язання типових задач і вправ, виконання яких сприяє засвоєнню фундаментальних понять вищої математики. Мінімально необхідна кількість теорії та велика кількість прикладів відповідає особливостям самостійного навчання. Досить дрібне розбиття на теми дозволяє використовувати його з різними навчальними програмами та при побудові індивідуальних траєкторій навчання.

# ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Подвійний інтеграл є узагальненням поняття визначеного інтеграла на випадок функції двох змінних $f\left(x,y\right)$ і являє собою скінченну границю двовимірної інтегральної суми в області $\left(G\right)$

$$\iint\limits_G f\left(x,y\right)dx\,dy=\lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_j\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i,y_j\right)\Delta x_i\Delta y_j\quad\left(n=1,2,3,...;\ m=1,2,3,...\right),\tag{1}$$

де $\Delta x_i\Delta y_j=\left(x_{i+1}-x_i\right)\left(y_{j+1}-y_j\right)$ − площі елементарних областей, на які розбивається плоска область $G$.

## 1. Властивості подвійного інтеграла

Подвійний інтеграл має всі основні властивості визначеного інтеграла. Перелічимо деякі з них:

1) якщо область $G$ розбивається на дві області $G_1$ і $G_2$, які не перерізаються (тобто $G=G_1\bigcup G_2$, де $G_1\bigcap G_2=\varnothing$), то область інтегрування подвійного інтеграла можна розбити на два інтеграла, тобто зобразити подвійний інтеграл від функції $f\left(x,y\right)$ по області $G$ у вигляді суми інтегралів по кожній з областей:

$$\iint\limits_G f\left(x,y\right)dx\,dy=\iint\limits_{G_1} f\left(x,y\right)dx\,dy+\iint\limits_{G_2} f\left(x,y\right)dx\,dy\,;\tag{2}$$

2) сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\iint\limits_G C\cdot f\left(x,y\right)dx\,dy=C\cdot\iint\limits_G f\left(x,y\right)dx\,dy\quad\left(C=\text{const},\,C\neq 0\right);\tag{3}$$

3) подвійний інтеграл від суми функцій, які є неперервними в області $G$, дорівнює сумі подвійних інтегралів від усіх доданків:

$$\iint\limits_G\left(f_1\left(x,y\right)+f_2\left(x,y\right)\right)dx\,dy=\iint\limits_G f_1\left(x,y\right)dx\,dy+\iint\limits_G f_2\left(x,y\right)dx\,dy\,.\tag{4}$$

## 2. Обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до послідовного обчисленню двох визначених інтегралів:

$$1)\quad \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy, \qquad (5)$$

де область інтегрування $G$: $a\le x\le b$, $y_1(x)\le y\le y_2(x)$, є правильною областю (рис. 1), тобто такою, що будь-яка пряма $x=x_0$, паралельна осі $Oy$, перетинає її межу $L$ не більше, ніж у двох точках.

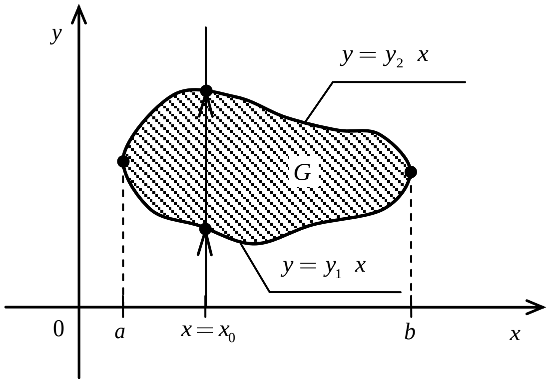


Рисунок 1

$$2)\quad \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx, \qquad (6)$$

де область інтегрування $G$: $c\le y\le d$, $x_1(y)\le x\le x_2(y)$, є правильною областю (рис. 2), тобто такою, що будь-яка пряма $y=y_0$, паралельна осі $Ox$, перетинає її межу $L$ не більше, ніж у двох точках.

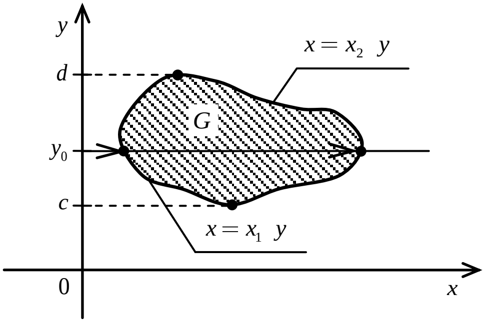


Рисунок 2

Інтеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ $\left(\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right)$ називається повторним або двократним. Інтеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ $\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right)$ називається внутрішнім, а $\int\limits_a^b dx$ $\left(\int\limits_c^d dy\right)$ – зовнішнім.

Якщо внутрішній інтеграл обчислюється по змінній $y$, то змінна $x$ розглядається як стала, а якщо внутрішній інтеграл обчислюється по змінній $x$, то сталою буде $y$. Межі інтегрування у внутрішньому інтегралі, зазвичай, є змінними і залежать від змінної, що розглядається як фіксована величина. Межі зовнішнього інтеграла завжди є сталими. Межі інтегрування як внутрішнього, так і зовнішнього інтегралів є сталими тільки тоді, коли область інтегрування є прямокутником зі сторонами, паралельними до осей координат. В цьому випадку при обчисленні подвійного інтеграла можна скористатися однією з формул:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,, \qquad (7)$$

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left( \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx\,, \tag{8}$$

де $G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ c \le y \le d \right\}$.

Результати обчислень не залежать від порядку інтегрування, однак, раціонально обравши порядок інтегрування, можна спростити обчислення.

Якщо верхня або нижня межа області інтегрування $G$ описується двома функціями, то її слід розбити прямою $x = c$, яка проходитиме через точку перетину графіків цих функцій: $A = y_1(x) \cap y_2(x)$, на дві області $G_1$ і $G_2$ (рис. 3). Подвійний інтеграл по області $G$ в цьому випадку розбивається на суму інтегралів:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_a^c dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_3(x)} f(x,y)\,dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{y_2(x)}^{y_3(x)} f(x,y)\,dy\,. \tag{9}$$

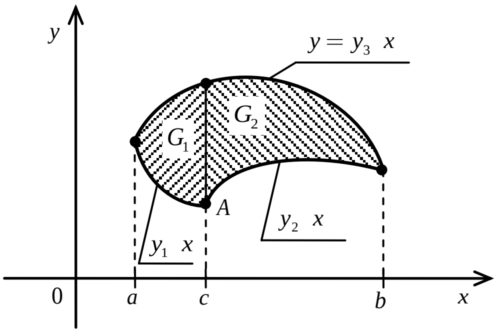


Рисунок 3

Якщо ліва або права межа області $G$ описується двома функціями, область інтегрування розбивається прямою $y = b$, яка проходить через точку перетину графіків цих функцій: $B = x_1(y) \cap x_2(y)$, на дві області $G_1$ і $G_2$ (рис. 4), а подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_c^b dy \int_{x_1(y)}^{x_3(y)} f(x,y)\,dx + \int_b^d dy \int_{x_2(y)}^{x_3(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (10)$$

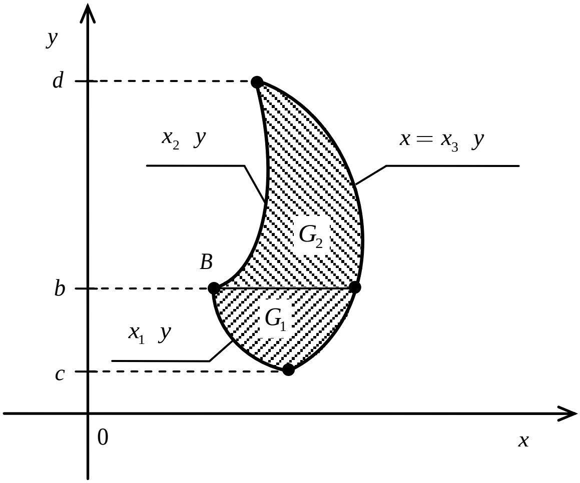


Рисунок 4

В випадку більш складного контура область $G$ розбивається на скінченну кількість частин, як описано вище.

***Приклад*** **1.** Обчисліть подвійний інтеграл $\int_{-1}^{2} dx \int_{1}^{3} \left(x^2 + 2xy\right) dy$.

***Розв'язання.*** Обчислювати починаємо з внутрішнього інтеграла по змінній $y$, змінну $x$ при інтегруванні вважаємо сталою:

$$\int_{-1}^{2} dx \int_{1}^{3} x^2 + 2xy \ dy = \int_{-1}^{2} \left( x^2 y + 2x \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{1}^{3} dx = \int_{-1}^{2} x^2 y + xy^2 \ \Big|_{1}^{3} dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} x^2 \ 3-1 \ + x \ 3^2 - 1^2 \quad dx = \left\| \begin{array}{l} \text{далі обчислюємо зовнішній} \\ \text{інтеграл, перетворивши} \\ \text{підінтегральний вираз} \end{array} \right\| =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left( 2x^2 + 8x \right) dx = \left( 2\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{2}{3}\left( 2^3 - (-1)^3 \right) + 4\left( 2^2 - (-1)^2 \right) =$$

$$= \frac{2}{3}(8+1) + 4(4-1) = \frac{2}{3} \cdot 9 + 4 \cdot 3 = 6 + 12 = 18 .$$

***Приклад* 2.** Обчисліть подвійний інтеграл $\int_{2}^{4} dy \int_{0}^{y} \frac{y^3}{x^2+y^2} dx$ .

***Розв'язання.*** В цьому прикладі обчислювати починаємо з внутрішнього інтеграла по змінній $x$; змінну $y$ при інтегруванні вважаємо сталою. Потім інтегруємо по змінній $y$:

$$\int_{2}^{4} dy \int_{0}^{y} \frac{y^3}{x^2+y^2} dx = \int_{2}^{4} y^3 \frac{1}{y} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Bigg|_{0}^{y} dy = \int_{2}^{4} y^2 \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{y} - \operatorname{arctg} \frac{0}{y} \right) dy =$$

$$= \int_{2}^{4} y^2 \left( \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 \right) dy = \int_{2}^{4} y^2 \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) dy = \frac{\pi}{4} \int_{2}^{4} y^2 \, dy = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y^3}{3} \Bigg|_{2}^{4} =$$

$$= \frac{\pi}{12}\left( 4^3 - 2^3 \right) = \frac{\pi}{12}(64 - 8) = \frac{\pi}{12} \cdot 56 = \frac{14}{3}\pi .$$

***Приклад* 3.** Обчисліть подвійний інтеграл $\iint\limits_G \left(x^2+2y\right)dx\,dy$, де область $G$ − прямокутник $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$.

***Розв'язання.*** Оскільки область інтегрування – прямокутник (рис. 5), то для обчислення інтеграла можна скористатися однією з формул, (7) чи (8):

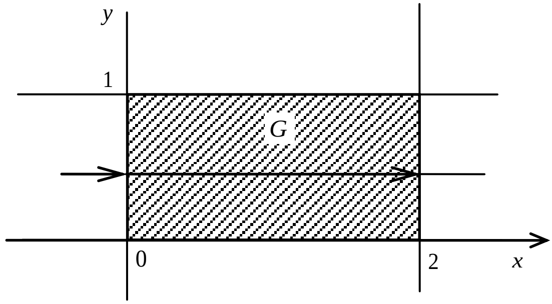


Рисунок 5

Вибір формули визначається виглядом підінтегральної функції. У цьому випадку не має принципової різниці інтегрування функції $f(x,y)=\left(x^2+2y\right)$ по змінній $x$ або по змінній $y$. Тому можна вибрати як формулу (7) , так і формулу (8):

$$\iint\limits_G \left(x^2+2y\right)dx\,dy=\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^1\left(x^2+2y\right)dy\right)dx=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1\left(x^2+2y\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left.\left(x^2y+2\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^1 dx=\int\limits_0^2\left.\left(x^2y+y^2\right)\right|_0^1 dx=\int\limits_0^2\left(x^2\left(1-0\right)+\left(1^2-0\right)\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right|_0^2=\frac{1}{3}\left(2^3-0\right)+\left(2-0\right)=\frac{1}{3}\cdot 8+2=\frac{8+6}{3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3};$$

$$\iint\limits_G \left(x^2+2y\right)dx\,dy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^2\left(x^2+2y\right)dx\right)dy=\int\limits_0^1\left(\frac{x^3}{3}+2yx\right)\Bigg|_0^2 dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{3}\left(2^3-0\right)+2y\left(2-0\right)\right)dy=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{3}\cdot 8+2y\cdot 2\right)dy=\int\limits_0^1\left(\frac{8}{3}+4y\right)dy=$$

$$=\left(\frac{8}{3}y+4\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{3}\left(1-0\right)+2\left(1^2-0\right)=\frac{8}{3}+2=\frac{8+6}{3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}.$$

Оскільки підінтегральна функція $\left(x^2+2y\right)$ неперервна, то результати обчислень, як і очікувалось, виявилися рівними: вони не залежать від порядку інтегрування.

***Приклад* 4.** Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_G \left(xy-3\right)dx\,dy$, де область $G$ обмежена лініями: $y=\frac{x^2}{4}$, $x=2$ і прямою, яка проходить через точки $A(1,2)$ і $B(2,4)$.

***Розв'язання.*** Запишемо рівняння прямої $AB$. Для цього скористаємося рівнянням прямої, яка проходить через дві дані точки:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}.$$

Підставляючи координати точок $A$ і $B$, отримаємо

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{4-2}\;\Rightarrow\;\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}.$$

За властивостями пропорцій:

$$2\cdot\left(x-1\right)=1\cdot\left(y-2\right)\;\Rightarrow\;2x-2=y-2.$$

В результаті рівняння прямої $AB$ має вигляд: $y=2x$.

Знайдемо координати точок перетину ліній, які обмежують цю область, розв'язуючи наступні системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4}, \\ y = 2x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4}, \\ x = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 2x, \\ x = 2. \end{cases}$

Тоді:

1) $\dfrac{x^2}{4} = 2x \;\Rightarrow\; x^2 = 8x \;\Rightarrow\; x^2 - 8x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-8) = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x = 0$, $x = 8$; відповідно, $y = 0$, $y = 16$;

2) $x = 2$, $y(2) = \left.\dfrac{x^2}{4}\right|_{x=2} = \dfrac{2^2}{4} = 1$;

3) $x = 2$, $y(2) = 2x\big|_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4$.

Область інтегрування $G$ зображено на рисунку 6.

Оскільки область $G$ з правого боку обмежена прямою $x = 2$ (рис. 6), то точки перетину ліній, що обмежують область, мають координати: $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(2,4)$.

Область $G$ має нижню межу $y = \dfrac{x^2}{4}$ і верхню межу $y = 2x$, тому за формулою (5),

$$\iint_G f(x,y)\,ds = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy ,$$

перейдемо до повторного інтеграла:

$$\iint_G (xy-3)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2x} (xy-3)\,dy .$$

Межі інтегрування у повторному інтегралі отримано наступним чином.

1) Для зовнішнього інтеграла. Область $G$ спроектуємо на вісь $Ox$, отримаємо відрізок $\left[0,2\right]$. Вздовж цього відрізка $x$ змінюється від верхньої межі $x = 0$, до нижньої межі $x = 2$.

2) Для внутрішнього інтеграла. Оберемо на відрізку $\left[0,2\right]$ осі $Ox$ довільну точку $x_0$, через яку проведемо пряму, паралельну осі $Oy$. Ця пряма входить в область $G$, перетинаючи нижню межу $y = \frac{x^2}{4}$, і виходить з області, перетинаючи верхню межу $y = 2x$. Тобто, $y$ змінюється вздовж цієї прямої в межах від $y = \frac{x^2}{4}$ до $y = 2x$.

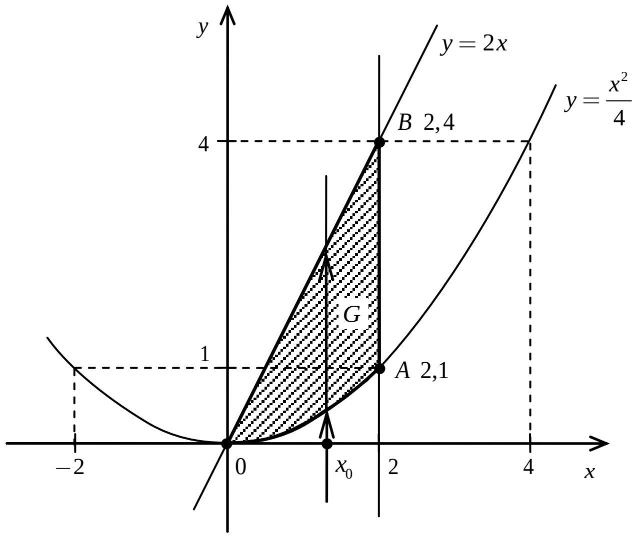


Рисунок 6

Обчислення повторного інтеграла слід починати з внутрішнього інтеграла по змінній $y$, в якому змінна $x$ вважається фіксованою величиною. Потім обчислимо зовнішній інтеграл по змінній $x$.

$$\iint\limits_G (xy-3)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2x} (xy-3)\,dy = \int\limits_0^2 \left( x\frac{y^2}{2} - 3y \right)\Bigg|_{\frac{x^2}{4}}^{2x} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left( \frac{x}{2}\left(4x^2 - \frac{x^4}{16}\right) - 3\left(2x - \frac{x^2}{4}\right)\right) dx = \int\limits_0^2 \left( 2x^3 - \frac{1}{32}x^5 - 6x + \frac{3}{4}x^2 \right) dx =$$

$$= \left( 2\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{1}{32}\cdot\frac{x^6}{6} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 = \left( \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2^6\cdot 3} - 3x^2 + \frac{x^3}{2^2} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{2^4}{2} - \frac{2^6}{2^6\cdot 3} - 3\cdot 2^2 + \frac{2^3}{2^2} = 8 - \frac{1}{3} - 12 + 2 = -\frac{1}{3} - 2 = -2\frac{1}{3}.$$

Обчислимо тепер той же подвійний інтеграл, змінивши порядок інтегрування: внутрішнє інтегрування будемо проводити по змінній $x$, а зовнішнє – по змінній $y$.

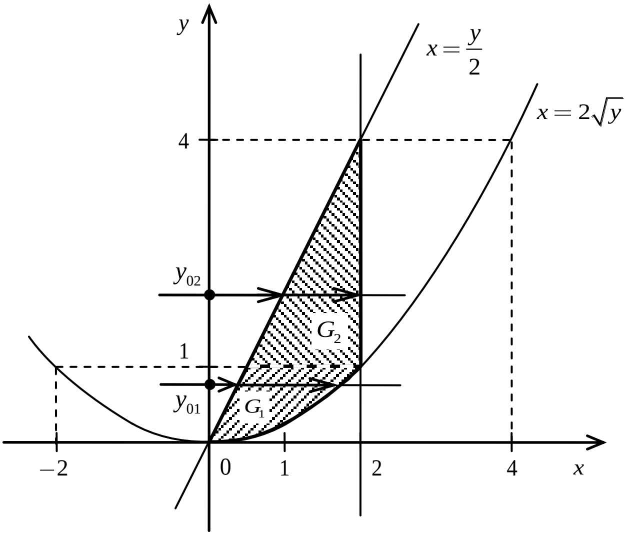


Рисунок 7

З рисунка 7 бачимо, що ліва межа області $G$ − одна лінія $x=\frac{y}{2}$, а права межа складається з двох ліній: $x=2\sqrt{y}$ і $x=2$ (рівняння ліній, які обмежують область $G$, треба розв'язати відносно змінної інтегрування у внутрішньому інтегралі, тобто $x$). В цьому випадку область $G$ розіб'ємо на дві частини: $G_1$ і $G_2$. В результаті початковий інтеграл перетвориться на суму інтегралів по цих областях.

Визначимо межі інтегрування.

1) Для зовнішніх інтегралів: області $G_1$ і $G_2$ спроектуємо на вісь $Oy$, отримаємо, відповідно, відрізки $\left[0,1\right]$ і $\left[1,4\right]$. Вздовж цих відрізків $y$ змінюється від нижньої межі 0 до верхньої межі 1, у першому повторному інтегралі, та від 1 до 4 – у другому повторному інтегралі.

2) Для внутрішніх інтегралів: на відрізках $\left[0,1\right]$ і $\left[1,4\right]$ осі $Oy$ оберемо, відповідно, довільні точки $y_{01}$ і $y_{02}$, через які проведемо прямі, паралельні осі $Ox$. Ці прямі входять в області $G_1$ і $G_2$, перетинаючи ліву межу $x=\frac{y}{2}$, і виходять з областей, перетинаючи праві межі $x=2\sqrt{y}$ і $x=2$, відповідно.

Тобто, області $G_1$ і $G_2$ задаються нерівностями:

$$G_1:\begin{cases}0\le y\le 1,\\ \frac{y}{2}\le x\le 2\sqrt{y};\end{cases}\qquad G_2:\begin{cases}1\le y\le 4,\\ \frac{y}{2}\le x\le 2.\end{cases}$$

Тоді

$$\iint\limits_G (xy-3)\,dx\,dy=\iint\limits_{G_1}(xy-3)\,dx\,dy+\iint\limits_{G_2}(xy-3)\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2\sqrt{y}}(xy-3)\,dx+\int_1^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2}(xy-3)\,dx=$$

$$=\int_0^1\left(y\frac{x^2}{2}-3x\right)\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{2\sqrt{y}}dy+\int_1^4\left(y\frac{x^2}{2}-3x\right)\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{2}dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{y}{2}\left(4y-\frac{1}{4}y^2\right)-3\left(2\sqrt{y}-\frac{1}{2}y\right)\right)dy+$$

$$+\int_1^4\left(\frac{y}{2}\left(4-\frac{1}{4}y^2\right)-3\left(2-\frac{1}{2}y\right)\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(2y^2-\frac{1}{8}y^3-6\sqrt{y}+\frac{3}{2}y\right)dy+\int_1^4\left(2y-\frac{1}{8}y^3-6+\frac{3}{2}y\right)dy=$$

$$=\left(\frac{2y^3}{3}-\frac{1}{8}\cdot\frac{y^4}{4}-\frac{6y^{3/2}}{3/2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{2y^2}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{y^4}{4}-6y+\frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{32}y^4-4\sqrt{y^3}+\frac{3}{4}y^2\right)\Bigg|_0^1+\left(y^2-\frac{1}{32}y^4-6y+\frac{3}{4}y^2\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{32}-4+\frac{3}{4}\right)+\left(\left(4^2-1\right)-\frac{1}{32}\left(4^4-1\right)-6\left(4-1\right)+\frac{3}{4}\left(4^2-1\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{32}-4+\frac{3}{4}\right)+\left(15-\frac{1}{32}\cdot255-6\cdot3+\frac{3}{4}\cdot15\right)=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{32}-4+\frac{3}{4}+15-\frac{255}{32}-18+\frac{45}{4}=-7+\frac{2}{3}+\frac{3+45}{4}-\frac{1+255}{32}=$$

$$=-7+\frac{2}{3}+\frac{48}{4}-\frac{256}{32}=-7+\frac{2}{3}+12-8=-3+\frac{2}{3}=-\frac{9-2}{3}=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}\,.$$

Як було сказано раніше, результати обчислень не залежать від порядку інтегрування, тому вони є рівними між собою.

З цього приклада видно, що раціонально вибравши порядок інтегрування, можна скоротити обчислення.

***Приклад* 5.** Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі $\int\limits_{2}^{5} dx \int\limits_{x+3}^{9-(x-4)^2} f(x,y)\,dy$.

***Розв'язання.*** Спочатку відтворимо область $G$ по межах інтегрування і побудуємо її на площині $xOy$ (рис. 8).

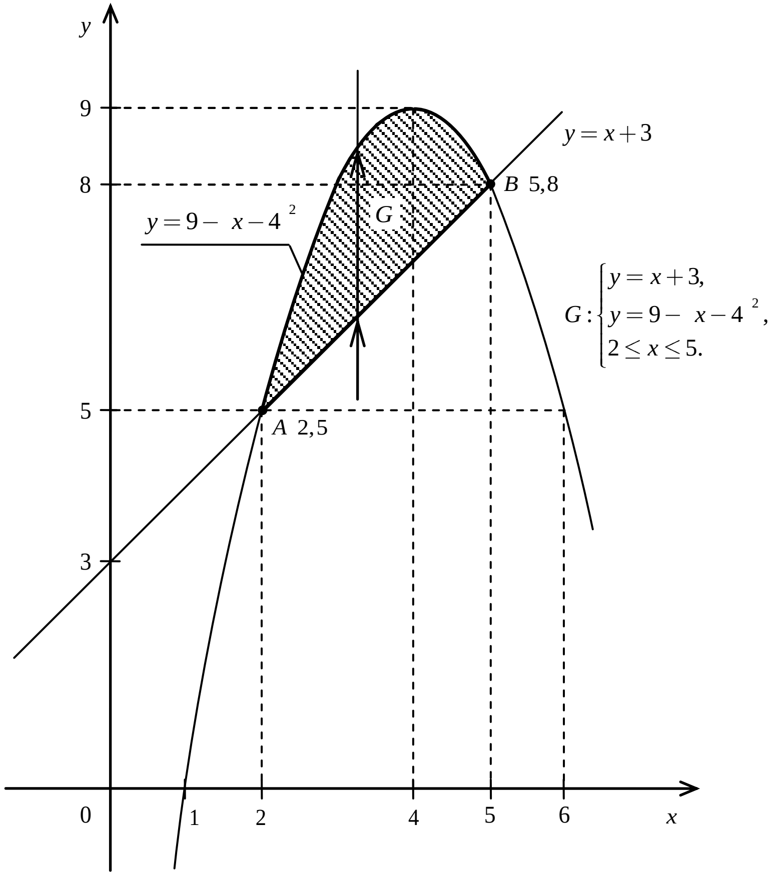


Рисунок 8

Розв’язуючи спільно рівняння $y = 9 - (x-4)^2$ і $y = x+3$, знайдемо координати точок перетину параболи і прямої: $A(2,5)$, $B(5,8)$. Область $G$ розташована у вертикальній смузі між прямими $x = 2$ і $x = 5$, і обмежена знизу прямою $y = x+3$, а зверху – параболою $y = 9-(x-4)^2$ (рис. 8).

За умовою, у повторному інтегралі внутрішнє інтегрування проводиться по змінній $y$, а зовнішнє – по змінній $x$. Після зміни порядку інтегрування отримаємо внутрішній інтеграл по змінній $x$, а зовнішній – по змінній $y$. Отже, знайдемо нові межі інтегрування.

Спроектуємо область $G$ на вісь $Oy$ (рис. 9). Отримаємо точки з ординатами $y = 5$ і $y = 9$ прямих, які обмежують зверху і знизу область $G$. Потім на відрізку $[5,9]$ осі $Oy$ оберемо довільні точки $y_{01}$ та $y_{02}$, через які проведемо довільні прямі, паралельні осі $Ox$. Ці прямі, входячи в область $G$, перетинають її ліву межу, гілку параболи, а, виходячи з області, оскільки її права межа складається з двох ліній, перетинають, одна – гілку параболи, а друга – пряму. Отже, виявляється, що область $G$ слід розбити на частини $G_1$ і $G_2$, прямою, паралельною осі $Ox$, яка проходить через точку $B$ (перетину ліній правої межі). Позначимо точку перетину цієї прямої і лівої межі області $G$ як $D$ (Рис. 9).

Щоб отримати межі зміни $x$ у внутрішньому інтегралі, розв'яжемо рівняння параболи $y = 9-(x-4)^2$ відносно $x$:

$$y = 9-(x-4)^2,$$

$$y-9 = -(x-4)^2,$$

$$-(y-9) = (x-4)^2,$$

$$9-y = (x-4)^2,$$

$$(x-4) = \pm\sqrt{9-y}.$$

В результаті $x = 4 \pm \sqrt{9 - y}$, причому лінія $BC$ визначається рівнянням $x = 4 + \sqrt{9 - y}$, а лінія $CD$ − рівнянням $x = 4 - \sqrt{9 - y}$. Рівняння прямої $y = x + 3$ також розв'яжемо відносно $x$ і отримаємо $x = y - 3$.

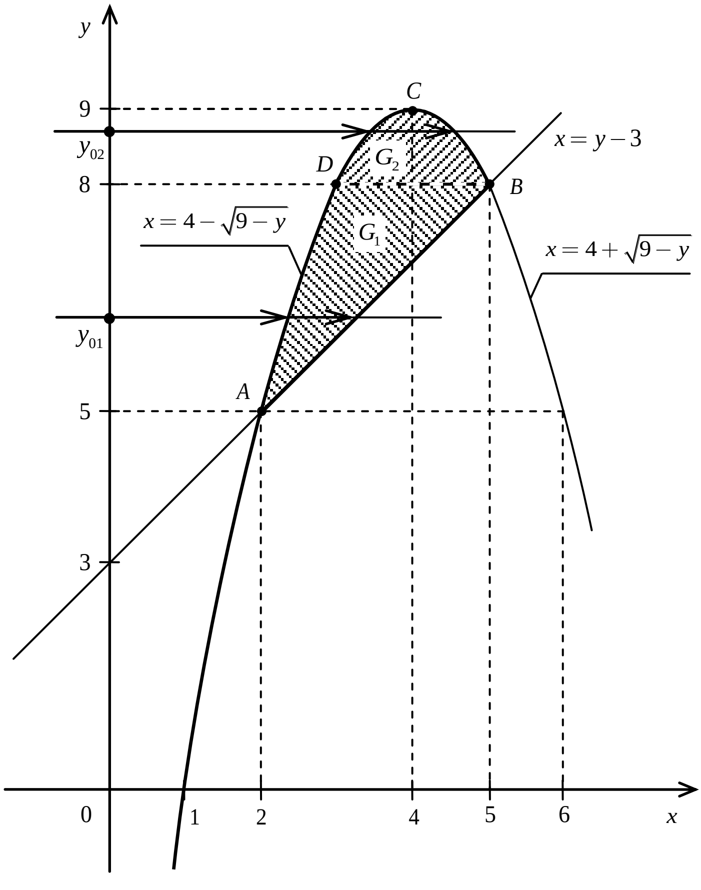


Рисунок 9

Таким чином, аналогічно прикладу 1.5, області $G_1$ і $G_2$ задаються нерівностями:

$$G_1: \begin{cases} 5 \le y \le 8, \\ 4 - \sqrt{9-y} \le x \le y - 3; \end{cases}$$

$$G_2: \begin{cases} 8 \le y \le 9, \\ 4 - \sqrt{9-y} \le x \le 4 + \sqrt{9-y}. \end{cases}$$

Тоді:

$$\int_2^5 dx \int_{x+3}^{9-(x-4)^2} f(x,y)\,dy = \int_5^8 dy \int_{4-\sqrt{9-y}}^{y-3} f(x,y)\,dx + \int_8^9 dy \int_{4-\sqrt{9-y}}^{4+\sqrt{9-y}} f(x,y)\,dx\,.$$

***Приклад* 6.** Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі $\int_0^3 dy \int_{\frac{y^2}{6}}^{3-\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_0^3 dy \int_{3+\sqrt{9-y^2}}^{6} f(x,y)\,dx + \int_3^6 dy \int_{\frac{y^2}{6}}^{6} f(x,y)\,dx$.

***Розв'язання.*** Як і в попередньому прикладі відтворимо по межах інтегрування область $G$, по якій обчислюється подвійний інтеграл, і зобразимо її на площині $xOy$ (рис. 10).

Область $G$ знаходиться в горизонтальній смузі між прямими $y = 0$ і $y = 6$, і складається з трьох частин: $G_1$, $G_2$ і $G_3$. У свою чергу, області $G_1$ і $G_2$ знаходяться в горизонтальній смузі між прямими $y = 0$ і $y = 3$, а область $G_3$ − між прямими $y = 3$ і $y = 6$. Область $G_1$ обмежена зліва лінією $x = \frac{y^2}{6}$, а справа – лінією $x = 3 - \sqrt{9-y^2}$. Область $G_2$ обмежена зліва лінією $x = 3 - \sqrt{9-y^2}$, а справа – прямою $x = 6$. Область $G_3$ обмежена зліва лінією $x = 3 + \sqrt{9-y^2}$, а справа – прямою $x = 6$.

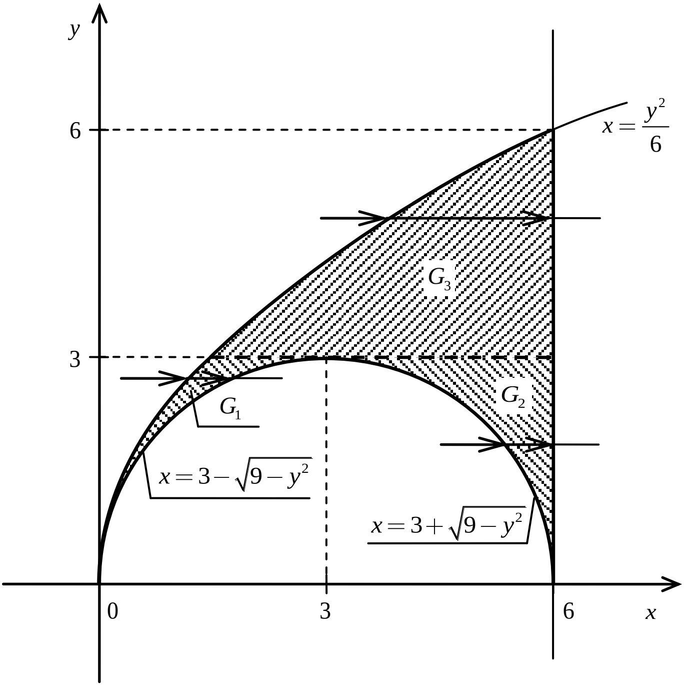


Рисунок 10

Тобто, ці області задаються нерівностями:

$$G_1:\begin{cases}0 \le y \le 3,\\ \dfrac{y^2}{6} \le x \le 3 - \sqrt{9 - y^2};\end{cases}$$

$$G_2:\begin{cases}0 \le y \le 3,\\ 3 + \sqrt{9 - y^2} \le x \le 6;\end{cases}$$

$$G_3:\begin{cases}3 \le y \le 6,\\ \dfrac{y^2}{6} \le x \le 6.\end{cases}$$

Таким чином, область $G$ обмежена лініями:

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - y^2}, \; x = \frac{y^2}{6}, \; 0 \le x \le 6.$$

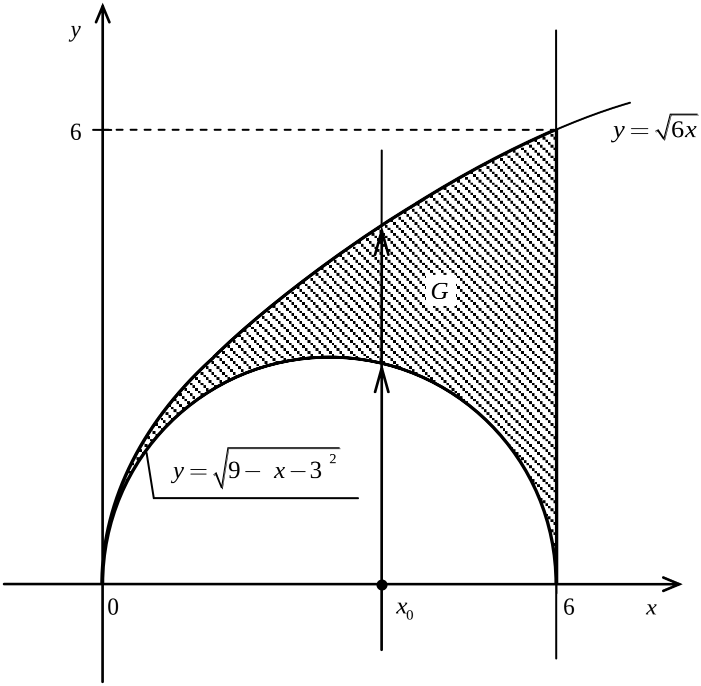


Рисунок 11

Спроектуємо область $G$ на вісь $Ox$ (рис. 11), в результаті отримаємо рівняння прямих $x = 0$ і $x = 6$, які обмежують зліва і справа вертикальну смугу, в якій розташована область $G$. Потім на відрізку $[0,6]$ осі $Ox$ оберемо довільну точку $x_0$, через яку проведемо пряму, паралельну осі $Oy$. Ця пряма входить в область $G$, перетинаючи нижню межу (коло), і виходить з області, перетинаючи верхню межу (параболу) зміни $y$ у внутрішньому інтегралі. Знайдемо нижню межу області $G$. Для цього розв'яжемо рівняння кола $x = 3 \pm \sqrt{9 - y^2}$ відносно $y$:

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - y^2} \,,$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{9 - y^2} \,,$$

$$\left(x - 3\right)^2 = 9 - y^2 ,$$

$$y^2 = 9 - \left(x - 3\right)^2 .$$

В результаті отримаємо $y = \pm\sqrt{9 - \left(x - 3\right)^2}$, причому нижня межа області $G$ визначається рівнянням $y = \sqrt{9 - \left(x - 3\right)^2}$. Рівняння параболи $x = \dfrac{y^2}{6}$ також розв'яжемо відносно $y$:

$$x = \frac{y^2}{6} \;\Rightarrow\; 6x = y^2 .$$

В результаті отримаємо $y = \pm\sqrt{6x}$, причому верхня межа області визначається рівнянням $y = \sqrt{6x}$.

Остаточно маємо:

$$\int_0^3 dy \int_{\frac{y^2}{6}}^{3-\sqrt{9-y^2}} f\left(x, y\right) dx + \int_0^3 dy \int_{3+\sqrt{9-y^2}}^{6} f\left(x, y\right) dx + \int_3^6 dy \int_{\frac{y^2}{6}}^{6} f\left(x, y\right) dx =$$

$$= \int_0^6 dx \int_{\sqrt{9-\left(x-3\right)^2}}^{\sqrt{6x}} f\left(x, y\right) dy \,.$$

## 3. Подвійний інтеграл в полярних координатах

При переході в подвійному інтегралі від прямокутних координат до полярних необхідно в підінтегральному виразі прямокутні координати $(x, y)$ замінити полярними $(\rho, \varphi)$ по формулах переходу: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а диференціал $dx\,dy$ замінити на $|J|\,d\rho\,d\varphi$, де $|J| = \rho$ − Якобіан переходу до полярних координат $(\rho, \varphi)$;

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi. \qquad (11)$$

У рівняннях ліній, які обмежують область інтегрування $G$, слід перейти до полярних координат по формулах переходу.

Якщо область інтегрування $G$ обмежена променями $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$ (рис. 12), де $\rho_1(\varphi)$ і $\rho_2(\varphi)$ − однозначні функції на відрізку $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, і $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$, то має місце співвідношення

$$\iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho. \qquad (12)$$

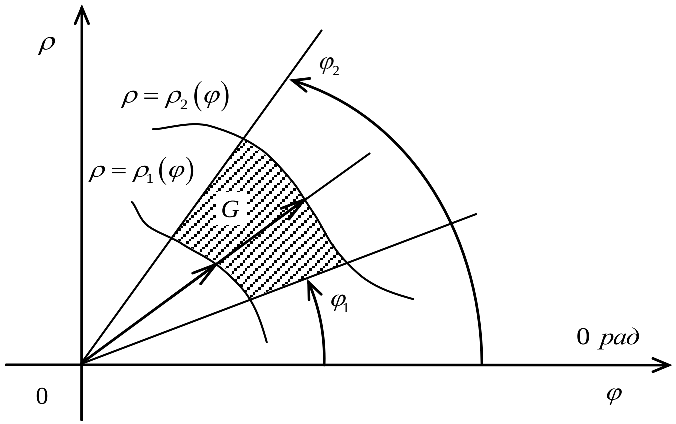


Рисунок 12

Внутрішній інтеграл обчислюється по змінній $\rho$, вважаючи $\varphi$ сталою. А зовнішній інтеграл обчислюється по змінній $\varphi$. Межі зовнішнього інтеграла завжди є сталими, а у внутрішньому інтегралі, зазвичай, залежать від $\varphi$. Якщо область інтегрування $G$ являє собою круговий сектор або різницю кругових секторів з центром на початку координат, то межі інтегрування внутрішнього інтеграла будуть сталими.

***Приклад* 7.** Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_G (y-1)\,dx\,dy$, якщо область $G$ задано нерівностями: $x^2+y^2 \le 9$, $y \ge x$, $x \ge 0$.

***Розв'язання.*** Область $G$ знаходиться справа відносно осі $Oy$ $(x \ge 0)$, обмежена колом $x^2+y^2=9$ і прямою $y=x$ (рис. 13).

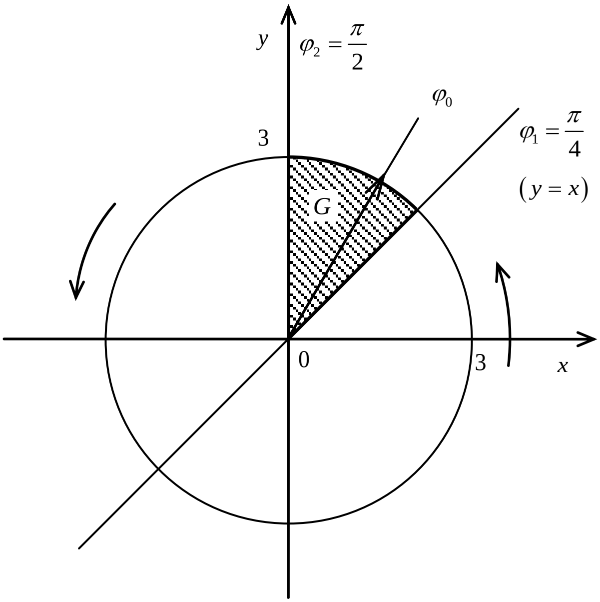


Рисунок 13

Оскільки область $G$ являє собою круговий сектор, то це вказує на доцільність переходу від декартових координат $(x, y)$ до полярних координат $(\rho, \varphi)$. Формули переходу мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

В результаті наступних перетворень, вираз $\left(x^2 + y^2\right)$ приймає вигляд:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cdot \cos^2\varphi + \rho^2 \cdot \sin^2\varphi = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 + y^2 = \rho^2 .$$

Тоді рівняння кола приймає вигляд $\rho = 3$ (рис. 13), пряма $x = 0$ переходить у промінь при $y \geq 0$:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y \geq 0; \end{cases} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \left(\begin{cases} \rho\cos\varphi = 0, \\ \rho\sin\varphi \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = 0, \\ \sin\varphi \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \arccos 0, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi, \end{cases}\right),$$

а пряма $y = x$ в першій чверті перетворюється у промінь

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \left(\rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi \Rightarrow \frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 1\right).$$

Перетворимо підінтегральний вираз:

$$f(x, y) = (y - 1) = (\rho\sin\varphi - 1).$$

Тепер необхідно перетворити подвійний інтеграл за формулою переходу (11):

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi .$$

Область $G$ розташована між променями $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ і $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Полюс лежить на межі області, $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = 3$. Область інтегрування є правильною в полярній системі координат, оскільки будь-який промінь $\varphi = \varphi_0$, де $\frac{\pi}{4} \le \varphi_0 \le \frac{\pi}{2}$, перетинає межу області $G$ не більше, ніж у двох точках (рис. 13). Згідно зі співвідношенням (12), даний подвійний інтеграл по правильній області $G$ дорівнює повторному інтегралу по цій області:

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,,$$

де внутрішнім є інтеграл по змінній $\rho$ з межами інтегрування від $0$ до $3$, а зовнішнім – інтеграл по змінній $\varphi$ з межами інтегрування від $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$. Згідно з формулою (12) маємо:

$$\iint\limits_G (y-1)\,dx\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^3 (\rho\sin\varphi - 1)\,\rho\,d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^3 \left(\rho^2\sin\varphi - \rho\right) d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\rho^3}{3}\sin\varphi - \frac{\rho^2}{2} \right)\Bigg|_0^3 d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3^3}{3}\sin\varphi - \frac{3^2}{2} \right) d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 9\sin\varphi - \frac{9}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \left( 9\cdot(-\cos\varphi) - \frac{9}{2}\varphi \right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{9}{2}(2\cos\varphi + \varphi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}(2\cos\varphi + \varphi)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$=\frac{9}{2}\left(2\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{9}{2}\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)+\frac{\pi-2\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{9}{2}\left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{-\pi}{4}\right)=\frac{9}{2}\cdot\frac{4\sqrt{2}-\pi}{4}=\frac{9}{8}\cdot\left(4\sqrt{2}-\pi\right).$$

***Приклад* 8.** Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_G \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$, якщо область $G$ задано нерівностями: $1\le x^2+y^2\le 4$, $y\ge\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y\le\sqrt{3}x$.

***Розв'язання.*** Область $G$ зображено на рисунку 14.

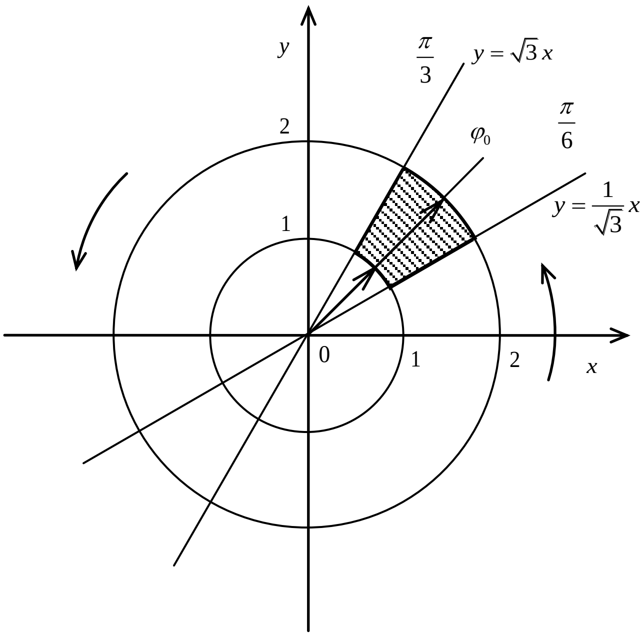


Рисунок 14

Оскільки область $G$, яка обмежена колами $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ і прямими $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$, що проходять через початок координат, являє собою частину кругового сектора, то, як і в попередньому прикладі, зручно перейти до полярної системи координат $\left(x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ x^2+y^2=\rho^2\right)$. Тоді підінтегральний вираз $\sqrt{4-x^2-y^2}$ приймає вигляд: $\sqrt{4-\rho^2}$, а рівняння ліній, які обмежують область $G$, відповідно, $\rho(\varphi)=1$, $\rho(\varphi)=2$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Область $G$ лежить між променями $\varphi_1=\frac{\pi}{6}$, $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$. Довільний промінь $\varphi_0$, проведений з полюса між цими променями, входить в область при $\rho_1(\varphi)=1$ і виходить при $\rho_2(\varphi)=2$.

Отже, область $G$ в полярній системі координат задається нерівностями:

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3},\\ 1\le\rho\le 2.\end{cases}$$

Область $G$ не містить полюса (початка координат), тому подвійний інтеграл приймає вигляд (12):

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_G f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\ .$$

Таким чином,

$$\iint\limits_G \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_G \rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_1^2 \rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} d\left(4-\rho^2\right) = -2\rho\,d\rho \\ -\frac{1}{2}d\left(4-\rho^2\right) = \rho\,d\rho \end{array} \right\| = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_1^2 \left(4-\rho^2\right)^{1/2} d\left(4-\rho^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left.\frac{\left(4-\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_1^2 d\varphi = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{3}\left.\sqrt{\left(4-\rho^2\right)^3}\right|_1^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left.\sqrt{\left(4-\rho^2\right)^3}\right|_2^1 d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{\left(4-1^2\right)^3} - \sqrt{\left(4-2^2\right)^3}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3^3}-0\right) d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3\sqrt{3}\,d\varphi = \sqrt{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \sqrt{3}\,\varphi\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} =$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\,\frac{2\pi-\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\,.$$

## 4. Геометричні застосування подвійних інтегралів

1. Площа $S$ плоскої фігури, яка займає на координатній площині $xOy$ обмежену область $G$, обчислюється за допомогою подвійного інтеграла від $f\left(x,y\right)=1$ по цій області:

$$S = \iint\limits_G dx\,dy\,. \tag{13}$$

Таким чином, площа $S$ області $G$ в декартових координатах визначається повторним інтегралом:

$$S = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \qquad (14)$$

або

$$S = \int_c^b dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\,. \qquad (15)$$

В деяких випадках подвійний інтеграл, який визначає площу фігури, зручніше обчислювати в полярній системі координат:

$$S = \iint_G \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\, d\rho\,. \qquad (16)$$

2. Об’єм циліндричного тіла, обмеженого зверху неперервною поверхнею $z = f(x, y)$, де $f(x, y) \geq 0$, знизу – площиною $xOy$ і з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі $Oz$, визначається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$, по області, яка є основою циліндричного тіла:

$$V = \iint_G f(x, y)\, dx\, dy \qquad (17)$$

(в декартовій системі координат)

або

$$V = \iint_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi \qquad (18)$$

(в полярній системі координат).

***Приклад* 9.** Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ $(x \leq 0)$.

***Розв’язання.*** Фігуру, обмежену синусоїдою $y = \sin x$, косинусоїдою $y = \cos x$ і прямою $x = 0$, зображено на рисунку 15.

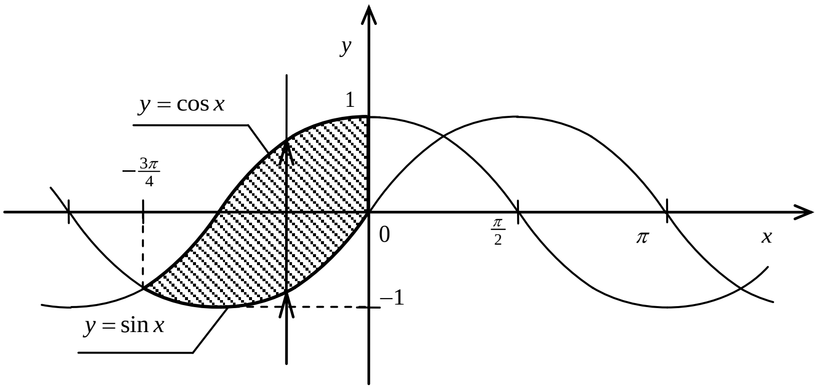


Рисунок 15

В даному випадку в повторному інтегралі зручно внутрішній інтеграл обчислювати по змінній $y$, а зовнішній − по змінній $x$, відповідно, площа фігури обчислюється за формулою (14):

$$S=\iint_G dy\,dx=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\,.$$

З рисунка 15 видно, що фігура проектується на вісь $Ox$ у відрізок $\left[-\frac{3\pi}{4},0\right]$, де $x=-\frac{3\pi}{4}$ і $x=0$ абсциси точок перетину ліній, які обмежують фігуру (область інтегрування $G$). Вони є, відповідно, нижньою і верхнею межами інтегрування у зовнішньому інтегралі. Будь-яка пряма, паралельна осі $Oy$, входить в область при $y=\sin x$, а виходить при $y=\cos x$. Ці функції є, відповідно, нижньою і верхнею межами інтегрування у внутрішньому інтегралі.

Тоді

$$S=\int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{0}dx\int\limits_{\sin x}^{\cos x}dy=\int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{0}y\Big|_{\sin x}^{\cos x}dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{0}\left(\cos x-\sin x\right)dx=$$

$$=\left(\sin x+\cos x\right)\Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{0}=\sin 0-\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)+\cos 0-\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)=$$

$$=0-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)\ (\text{кв.од.})$$

***Приклад*** **10.** Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $y=x\ \left(y\le x\right)$, $y=-x\ \left(y\ge -x\right)$ і колами $x^2-3x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$.

***Розв'язання.*** Приведемо рівняння кола $x^2-3x+y^2=0$ до канонічного вигляду, виділивши повний квадрат відносно змінної $x$:

$$x^2-3x+y^2=0\ \Rightarrow\ \left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{3^2}{2^2}\right)+y^2=\frac{3^2}{2^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

В результаті отримаємо рівняння кола з центром $O_1\left(\frac{3}{2},0\right)$ і радіусом $R_1=\frac{3}{2}$. Шляхом аналогічних перетворень рівняння $x^2-6x+y^2=0$ отримаємо канонічне рівняння кола $\left(x-3\right)^2+y^2=3^2$ з центром $O_2\left(3,0\right)$ і радіусом $R_2=3$.

Область $G$, яку займає фігура, обмежена даними колами і прямими $y = x \ \left(y \le x\right)$, $y = -x \ \left(y \ge -x\right)$, зображено на рисунку 16.

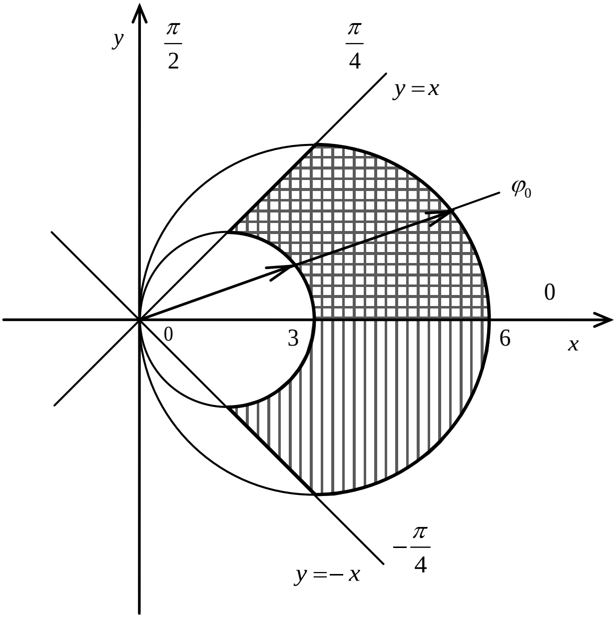


Рисунок 16

Оскільки фігура обмежена колами, то подвійний інтеграл, який визначає площу даної фігури, зручніше обчислювати в полярній системі координат, використовуючи формулу (16):

$$S = \iint\limits_G \rho \, d\rho \, d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho \, d\rho \, .$$

Нагадаємо, що прямокутні координати $\left(x, y\right)$ будь-якої точки площини $xOy$ пов'язані з полярними координатами $\left(\rho, \varphi\right)$ наступними формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

де $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Підставляючи їх в рівняння кола, отримаємо:

$$\rho^2\cos^2\varphi - 3\rho\cos\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 0\ ,$$

$$\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 3\rho\cos\varphi\ \Big|:\rho\ .$$

Отже, полярне рівняння першого кола: $\rho = 3\cos\varphi$. Аналогічно отримаємо полярне рівняння другого кола: $\rho = 6\cos\varphi$. Область $G$, яку займає фігура, лежить між променями $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$, оскільки:

$$y \ge -x\ \Rightarrow\ \frac{y}{x} \ge -1\ \Rightarrow\ \frac{\rho\sin\varphi_1}{\rho\cos\varphi_1} \ge -1\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi_1 \ge -1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \varphi_1 \ge \operatorname{arctg}(-1)\ \Rightarrow\ \varphi_1 \ge -\frac{\pi}{4}\ \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < 0\right),$$

$$y \le x\ \Rightarrow\ \frac{y}{x} \le 1\ \Rightarrow\ \frac{\rho\sin\varphi_2}{\rho\cos\varphi_2} \le 1\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi_2 \le 1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \varphi_2 \le \operatorname{arctg}1\ \Rightarrow\ \varphi_2 \le \frac{\pi}{4}\ \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Тоді площа фігури обчислюється за формулою (16):

$$S = \iint_G \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\, d\rho = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{3\cos\varphi}^{6\cos\varphi} \rho\, d\rho\ .$$

З умови видно, що фігура є симетричною. Вісь координат $Ox$ ділить фігуру на дві рівні частини. Тому можна обчислити половину цієї площі і результат помножити на два. Остаточно маємо:

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{3\cos\varphi}^{6\cos\varphi}\rho\,d\rho=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{3\cos\varphi}^{6\cos\varphi}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\Big|_{3\cos\varphi}^{6\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(6^2\cos^2\varphi-3^2\cos^2\varphi\right)d\varphi=27\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{27}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{27}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\cdot\pi}{4}\right)=\frac{27}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{27}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot1\right)=\frac{27}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{27\left(\pi+2\right)}{8}\ \left(\text{кв.од.}\right).$$

***Приклад* 11.** Обчислити площу фігури, заданої нерівностями $x^2+\left(y+r\right)^2\le r^2$, $3x-r\ge y$, $x\ge0$.

***Розв'язання.*** Область $G$, яку займає фігура на площині $xOy$, зображена на рисунку 17.

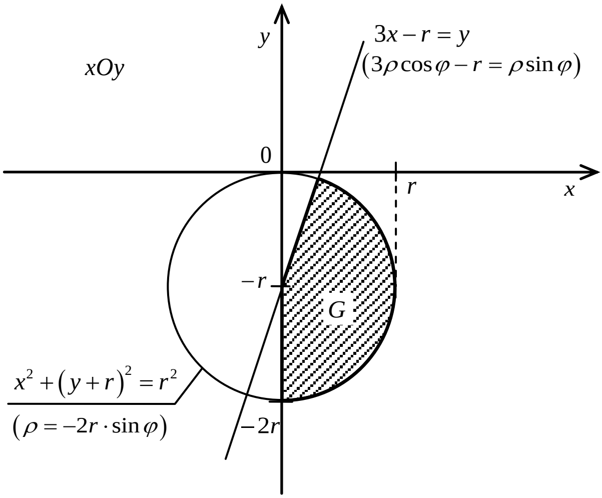


Рисунок 17

Область $G$ обмежена двома прямими $3x-r=y$, $y=0$ і колом $x^2+\left(y+r\right)^2=r^2$ з центром в точці $\left(0,-r\right)$ і радіусом, рівним $r$.

Як і в попередньому прикладі, подвійний інтеграл, який визначає площу даної фігури, зручніше обчислювати в полярній системі координат, використовуючи формулу (16).

Для зручності обчислення подвійного інтеграла проведемо вісь координат $OX$ через центр кола паралельно осі $Ox$. Таким чином, отримаємо координатну площину $XOy$, в якій область $G'$ обмежена концентричним колом $x^2+y^2=r^2$ з радіусом, рівним $r$, і прямими $3x=y$, $y=0$ (рис. 18).

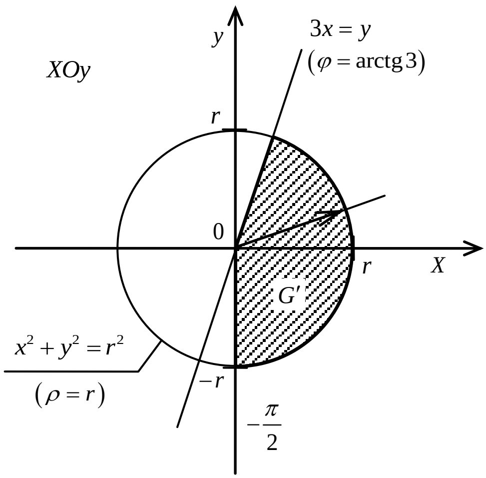


Рисунок 18

Площа області $G$ на площині $xOy$ і площа області $G'$, яку займає фігура на площині $XOy$, є рівними між собою. Тоді за формулою (16):

$$S=\iint\limits_{G}\rho\,d\rho\,d\varphi=\iint\limits_{G'}\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho\,d\rho\,.$$

Перейдемо від декартових координат $(x,y)$ до полярних координат $(\rho,\varphi)$, використовуючи формули переходу $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $x^2+y^2=\rho^2$. В результаті заміни рівняння ліній, які обмежують область $G'$, приймають вигляд:

$$x^2+y^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad \rho=r\,,$$

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi_1=-\frac{\pi}{2}\,,\ \text{(так як } y\le 0\text{)},$$

$$3x=y \quad\Rightarrow\quad \varphi_2=\operatorname{arctg}3\,.$$

Область $G'$ розташована між променями $\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ і $\varphi_2=\operatorname{arctg}3$. Полюс лежить на межі області, $\rho_1(\varphi)=0$, $\rho_2(\varphi)=r$. Отже, область $G'$, яку займає фігура на площині $XOy$, в полярній системі координат задається нерівностями:

$$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\operatorname{arctg}3,\\ 0\le\rho\le r,\end{cases}$$

де $\rho$ – змінна, по якій буде проводитися внутрішнє інтегрування, а $\varphi$ змінна, по якій буде проводитися зовнішнє інтегрування.

Тоді, згідно з формулою (16) обчислення площі плоскої фігури, маємо:

$$S=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg}3}d\varphi\int\limits_{0}^{r}\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg}3}\rho^2\Big|_0^r\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg}3}r^2d\varphi=\frac{r^2}{2}\cdot\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg}3}=$$

$$=\frac{r^2}{2}\cdot\left(\operatorname{arctg}3-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{r^2}{2}\cdot\left(\operatorname{arctg}3+\frac{\pi}{2}\right)\ \text{(кв.од.)}$$

***Приклад* 12.** Обчислити об’єм тіла, яке розташовано в першому квадранті і обмежено поверхнями, рівняння яких: $xy = 9$, $y^2 = 3x$, $x = 1$, $z = 0$ і $z = 2$.

***Розв’язання.*** Оскільки рівняння перших трьох поверхонь не містять змінної $z$, то звідси випливає, що усі ці поверхні є циліндричними, твірні яких паралельні осі $Oz$, а напрямні – криві, які лежать у площині $xOy$, рівняння яких: $xy = 9$, $y^2 = 3x$ і $x = 1$.

Рівняння $z = 0$ являє собою площину $xOy$, а рівняння $z = 2$ − площину, паралельної площині $xOy$. Оскільки тіло знаходиться в першому квадранті, то всі аплікати точок цього тіла будуть невід'ємними. Отже, тіло, об’єм якого необхідно визначити, обмежено знизу площиною $xOy$, зверху – неперервною поверхнею $f(x, y) = 2$, і з боків – циліндричними поверхнями, твірні яких паралельни осі $Oz$. В цьому випадку об’єм буде виражатися за формулою (17):

$$V = \iint_G f(x, y)\,dx\,dy.$$

Для обчислення даного інтеграла визначимо область інтегрування $G$. Щоб її отримати, необхідно спроектувати тіло на площину $xOy$. Область $G$ обмежена параболою $y^2 = 3x$, гіперболою $xy = 9$ і прямою лінією $x = 1$.

Парабола $y^2 = 3x$ розташована в першому і четвертому квадрантах. Вершина її збігається з початком координат. Гіпербола розташована в першому і третьому квадрантах, причому осі координат є її асимптотами. Пряма $x = 1$ паралельна осі $Oy$ і перетинає вісь абсцис в точці $x = 1$ (рис. 19).

Знайдемо координати точки перетину параболи і прямої, розв’язуючи спільно наступні рівняння:

$$\begin{cases} y^2 = 3x, \\ x = 1. \end{cases}$$

Отримаємо: $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

Аналогічно знайдемо точку $(1,9)$ − перетину прямої $x=1$ з гіперболою $xy=9$, а також точку $(3,3)$ − перетину параболи $y^2 = 3x$ і гіперболи $xy=9$.

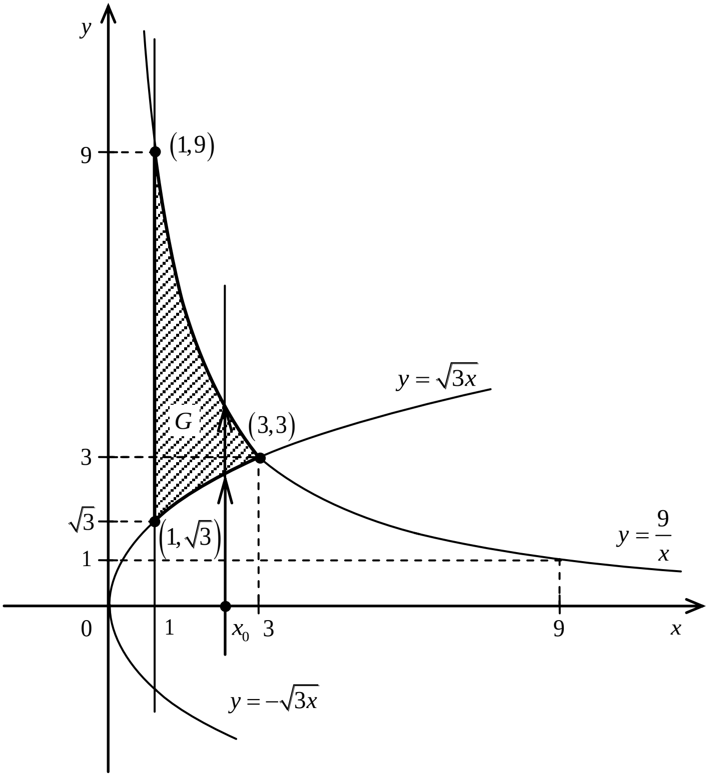


Рисунок 19

Оскільки подвійний інтеграл виражається через повторний інтеграл, визначимо порядок інтегрування. Очевидно, що в цьому випадку раціонально буде інтегрувати внутрішній інтеграл по змінній $y$, а зовнішній – по змінній $x$. Тому формула (17) для обчислення об'єма циліндричного тіла приймає вигляд:

$$V=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy .$$

Значення меж інтегрування у зовнішньому інтегралі визначимо з рисунка 19: $a$ і $b$ є абсцисами кінців сегмента, які отримано при проектуванні області $G$ на вісь $Ox$. Легко бачити, що в нашому випадку $a=1$ і $b=3$. З рисунка 19 також легко визначити внутрішні межі інтегрування. Будь-яка пряма, паралельна осі $Oy$, входить в область, перетинаючи лінію $y_1(x)=\sqrt{3x}$, а виходить, перетинаючи лінію $y_2(x)=\dfrac{9}{x}$. Ці функції будуть, відповідно, нижньою і верхнею межами інтегрування у внутрішньому інтегралі.

Остаточно отримаємо:

$$V=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy=\int_1^3 dx\int_{\sqrt{3x}}^{\frac{9}{x}} 2\,dy=2\int_1^3 y\Big|_{\sqrt{3x}}^{\frac{9}{x}}\,dx=$$

$$=2\int_1^3\left(\frac{9}{x}-\sqrt{3x}\right)dx=2\left(9\ln|x|-\sqrt{3}\,\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_1^3=2\left(9\ln|x|-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3}\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=2\left(9\left(\ln 3-\underbrace{\ln 1}_{0}\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{3^3}-1\right)\right)=2\left(9\ln 3-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 3\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=$$

$$=2\left(9\ln 3-6+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\ (\text{куб.од.}),\quad \left(9\ln 3-6+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)>0 .$$

***Приклад* 13.** Обчислити об'єм частини кулі радіуса $R$ з центром у початку координат, яку вирізано круговим циліндром, що проходить через вісь $Oz$, з радіусом основи, рівним $\frac{R}{2}$.

***Розв'язання.*** Рівняння сфери: $x^2+y^2+z^2=R^2$ $\left(z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)$.

Рівняння циліндра $x^2+\left(y-\frac{R}{2}\right)^2=\frac{R^2}{4}$, $\quad x^2+y^2-Ry+\frac{R^2}{4}=\frac{R^2}{4}$,

або $$x^2+y^2=Ry.$$

Тіло є симетричним відносно площин $xOy$ $(z=0)$ і $yOz$ $(x=0)$ (рис. 20).

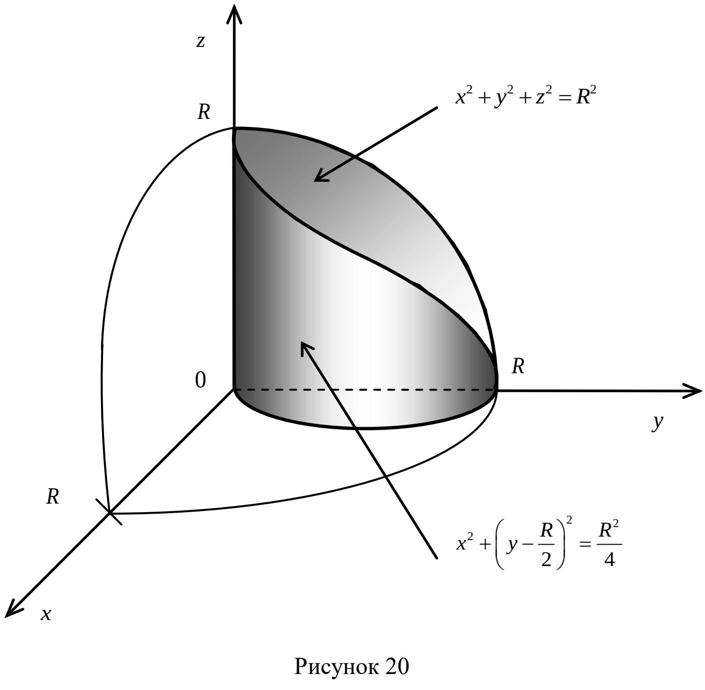


Рисунок 20

Обчислимо чверть об’єму початкового тіла і результат помножимо на 4.

Рівняння $z=0$ визначає площину $xOy$, а рівняння $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ – частину сферичної поверхні. Оскільки тіло знаходиться в першому квадранті, то всі аплікати точок цього тіла будуть невід'ємними $(z\geq 0)$, тобто усі ці точки розташовані вище або на площині $z=0$. Отже, тіло, об’єм котрого необхідно визначити, знизу обмежено площиною $xOy$, зверху обмежено неперервної поверхнею $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\geq 0$. З боків тіло обмежено площиною $x=0$ і циліндричною поверхнею (круговим циліндром), твірна якої паралельна осі $Oz$. В цьому випадку об’єм буде виражатися за формулою (17):

$$V=\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Оскільки у даного кругового циліндра напрямною служить коло $x^2+y^2=Ry$, яке лежить в площині $xOy$, то областю інтегрування $G$ буде півкруг $x^2+y^2=Ry$ $(x\geq 0)$ (рис. 21).

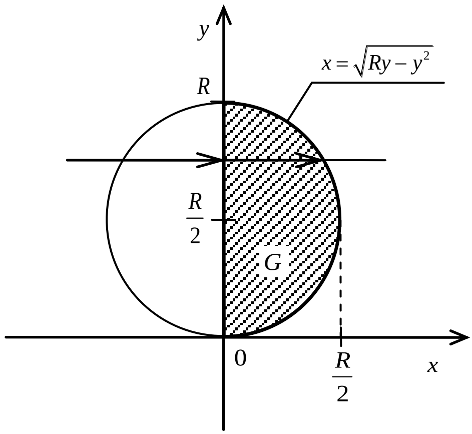


Рисунок 21

Внутрішнє інтегрування будемо проводити по змінній $x$, а зовнішнє – по $y$. Межі інтегрування по змінній $y$ будуть сталими. Нижня межа – $y = 0$, верхня – $y = R$. Межі інтегрування по змінній $x$ визначимо з рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = Ry, \qquad\qquad x = \pm\sqrt{Ry - y^2}\ .$$

Для точок частини тіла, розташованого в першому квадранті $x \ge 0$. Отже, межі по змінній $x$ будуть наступними: нижня − $x = 0$ і верхня − $x = \sqrt{Ry - y^2}$. Підінтегральну функцію, $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, визначає рівняння поверхні, яка обмежує тіло зверху. Отже, за формулою (17) отримаємо:

$$\frac{V}{4} = \iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^R dy \int_0^{\sqrt{Ry - y^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\ .$$

Для обчислення інтеграла зручно перейти до полярних координат

$$\left(x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi;\ x^2 + y^2 = \rho^2,\ dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi\right).$$

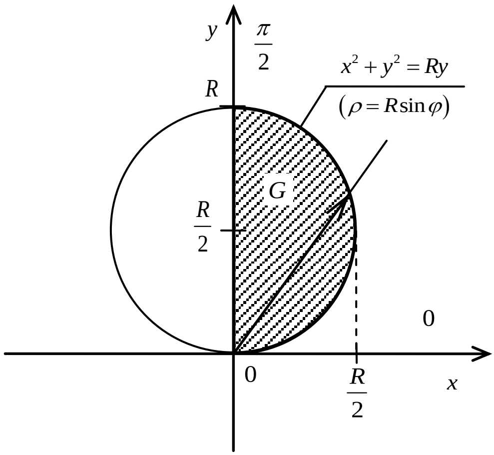


Рисунок 22

Визначимо межі інтегрування для полярних координат. Полярний кут $\varphi$ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 22). Для визначення меж інтегрування по $\rho$ підставимо в рівняння кола

$$x^2 + y^2 = Ry$$

замість $x$ і $y$ їхні вирази в полярних координатах:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = R\rho \sin \varphi ,$$

$$\rho^2 = R\rho \sin \varphi .$$

Звідси випливає, що

$$\rho(\rho - R\sin\varphi) = 0$$

або

$$\rho = 0 , \ \rho = R\sin\varphi .$$

Отже, нижньою межею буде $\rho_1(\varphi) = 0$, верхньою – $\rho_2(\varphi) = R\sin\varphi$.

Перетворимо підінтегральну функцію:

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - \left(x^2 + y^2\right)} = \sqrt{R^2 - \rho^2} .$$

В результаті, використовуючи формулу (18)

$$V = \iint\limits_G f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho\, d\rho\, d\varphi ,$$

маємо:

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\sin\varphi} \rho\sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho = \left\| \begin{array}{l} d\left(R^2 - \rho^2\right) = -2\rho\, d\rho \\ -\frac{1}{2} d\left(R^2 - \rho^2\right) = \rho\, d\rho \end{array} \right\| =$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\sin\varphi}\left(R^2-\rho^2\right)^{1/2} d\left(R^2-\rho^2\right)=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{R\sin\varphi} d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(R^2-\rho^2\right)^3}\Bigg|_0^{R\sin\varphi} d\varphi=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\left(R^2-R^2\sin^2\varphi\right)^3}-R^3\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^3-R^3\sqrt{\left(\underbrace{1-\sin^2\varphi}_{\cos^2\varphi}\right)^3}\right)d\varphi=\frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\left|\cos^3\varphi\right|\right)d\varphi=$$

$$=\left\| 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le\cos\varphi\le 1\right\|=\frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^3\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\cdot\cos\varphi\right)d\varphi=\frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\left(1-\sin^2\varphi\right)\cdot\cos\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\varphi+\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\right)d\varphi=\left\| d\left(\sin\varphi\right)=\cos\varphi\, d\varphi\right\|=$$

$$=\frac{R^3}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\varphi\right)d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\, d\left(\sin\varphi\right)\right)=\frac{R^3}{3}\left(\varphi-\sin\varphi+\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{R^3}{3}\left(\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)+\frac{1}{3}\left(\underbrace{\sin^3\frac{\pi}{2}}_{1}-\underbrace{\sin^3 0}_{0}\right)\right)=$$

$$=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{R^3}{3}\cdot\frac{3\pi-4}{6}=\frac{R^3\left(3\pi-4\right)}{18}\quad \text{(куб. од.)}$$

$$\left( 3\pi > 4 \Rightarrow \frac{R^3\left(3\pi - 4\right)}{18} > 0 \right).$$

Тоді величина всього шуканого об’єму дорівнює:

$$V = 4 \cdot \frac{R^3\left(3\pi - 4\right)}{18} = \frac{2R^3\left(3\pi - 4\right)}{9} \quad \left(\text{куб. од.}\right).$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для вузов / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.

2. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 1. / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 343 с.

3. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 2. / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 336 с.

4. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. I. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1971. –600 с.

5. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. II. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 1. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 712 с.

7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 2. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 576 с.

8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 3. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1989. – 352 с.

9. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1984. – 592 с.

10. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. Функции нескольких переменных / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1986. – 528 с.

11. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. Интегралы. Ряды / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1994. – 496 с.

12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1990. – 270 с.

13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 352 с.

14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 3. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 288 с.

15. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. І. / Ю. М. Сенчук. – Х. : НТУ «ХПІ», 2004. – 408 с.

16. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. ІІ. / Ю. М. Сенчук. – Х. : НТУ «ХПІ», 2006. – 408 с.

17. Заболоцький М. В. Математичний аналіз / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. – К. : Знання, 2008. – 421 с.

18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 1. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1966. – 608 с.

19. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 2. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1988. – 800 с.

20. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 3. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – 653 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**Ахієзер** Олена Борисівна, **Геляровська** Оксана Анатоліївна,
**Дунаєвська** Ольга Ігорівна, **Галуза** Олексій Анатолійович,
**Москалець** Наталя Василівна

# Методичні вказівки до індивідуальних завдань з вищої математики за темою «Подвійні інтеграли» для студентів заочної та дистанційної форм навчання

для студентів усіх спеціальностей
вищих технічних навчальних закладів

За загальною редакцією **Ахієзер** Олена Борисівна

Роботу до видання рекомендував М.І. Безменов

Редактор М. П. Ефремова

**План 2015 р., поз. 170**

Підп.до друку 2016 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 3,0
Наклад 50 прим. Зам. № Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.